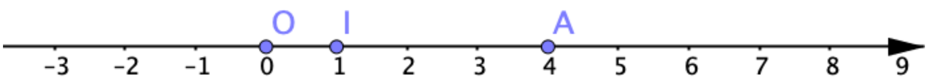
Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ - Intervalles

Définition

L’ensemble des nombres utilisés au quotidien (les nombres négatifs, positifs, décimaux, …) est appelé l’ensemble des réels, et est noté $\mathbb{R}$.

On peut représenter l’ensemble de ces nombres réels par une droite gradué, munie d'une origine O, d'une unité et orientée vers les nombres positifs.



On a placé sur la droite le point A qui correspond au nombre 4. On dit que A a pour abscisse 4.

Ainsi, à chaque nombre réel correspond un point sur la droite et réciproquement.

On peut indiquer sur la droite le symbole $+\infty$, qui est le symbole de l’infini pour signifier que la droite ne s’arrête pas.

Intervalles dans $\mathbb{R}$

On s’intéresse désormais à une partie de la droite, comprise entre I et A.

L’ensemble de ces réels compris entre les abscisses des points I et A est appelé un intervalle.

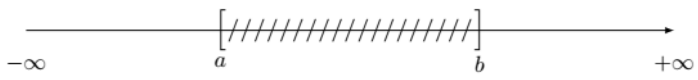
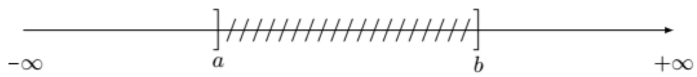
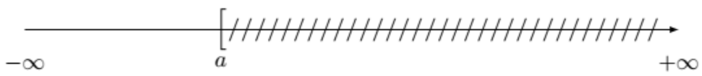
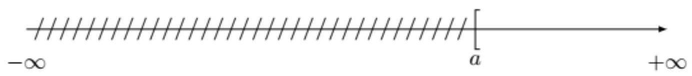
La notation de l’intervalle est la même que pour un segment.

Par exemple, l’intervalle entre les abscisses des points I et A se note $[1; 4]$.

Si l'abscisse du point I n’appartient par à l’intervalle, on utilisera un crochet ouvert pour le signifier.

On notera alors $]1; 4]$.

Il existe différents types d’intervalles.

Intervalle	Inégalité	Droite
$x \in [a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$x \in]a; b]$	$a < x \leq b$	
$x \in [a; +\infty[$	$a \leq x$	
$x \in]-\infty; a[$	$x < a$	

Pour simplifier l'écriture de certains intervalles, on utilise des notations particulières.

Ainsi, $\mathbb{R}^+$ correspond à l'ensemble des nombres réels positifs, que l'on peut aussi noter $[0;+\infty[$.

$\mathbb{R}^-$ correspond à l'ensemble des nombres réels négatifs, que l'on peut aussi noter $]-\infty;0]$.

Enfin, $\mathbb{R}^*$ correspond à l'ensemble des nombres réels privés de 0, que l'on note aussi $\mathbb{R}\backslash 0$.

Intersection de deux intervalles I et J

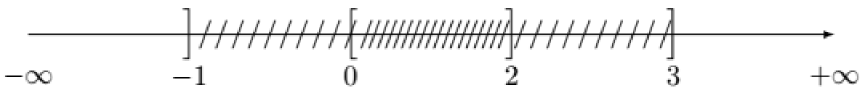
L'intersection des intervalles I et J est composé de tous les éléments communs à I et à J en même temps.

On note l'intersection par $I \cap J$ et cela se lit I inter J.

Exemples :

1) Déterminons $[-1;2[\cap[0;3]$.

Pour cela, on peut sur la droite graduée hachurer le premier intervalle puis le second intervalle. L'intersection correspond à l'intervalle hachuré deux fois.



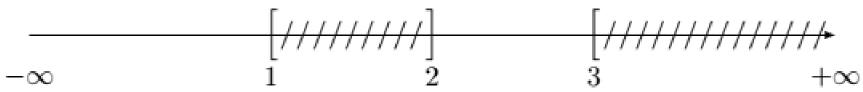
On trouve alors $[-1;2[\cap[0;3]=[0;2[$

2) Déterminons $[1;2]\cap[3;+\infty[$.

On remarque que $2<3$, donc aucun élément n'est commun aux deux intervalles.

On dira que l'intersection est égale à l'ensemble vide et se note $\varnothing$.

Ainsi : $[1;2]\cap[3;+\infty[=\varnothing$



Réunion de deux intervalles I et J

La réunion des intervalles I et J est composée de tous les éléments appartenant à I ou à J.

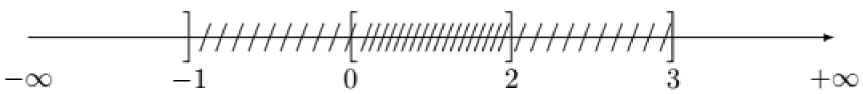
La réunion peut aussi contenir des éléments appartenant à la fois à I et à J.

La réunion se note $I \cup J$ et se lit I union J.

Exemples

1) Déterminons $[-1;2[\cup[0;3]$.

Pour cela, on peut sur la droite graduée hachurer les deux intervalles. La réunion correspond à l'intervalle hachuré au moins une fois.



On trouve alors $[-1;2[\cup[0;3]=[-1;3]$

2) Déterminons $[1;2]\cup[3;+\infty[$.

On remarque qu'il n'y a pas de simplification possible de l'écriture.

On écrit donc la réunion sous la forme $[1;2] \cup [3;+\infty[$.