La fonction exponentielle

Définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est appelée la fonction exponentielle, et est égale à sa dérivée.

On note cette fonction $f(x) = \exp(x)$.
Ainsi, $f'(x) = \exp(x)$.

Propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

On sait aussi que $\exp(0) = 1$ donc $f'(0) = 1$.

Cela permet donc d'écrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 :

$T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$.

Application à la dérivation

Soit f une fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x\exp(x)$.

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \exp(x)$.

On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = v(x) = \exp(x)$.

Ainsi, $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

Donc $f'(x) = 1 \times \exp(x) + x \times \exp(x) = (x + 1)\exp(x)$.

On préfèrera écrire la dérivée sous la forme d'un produit, pour faciliter le calcul de son signe.

Propriété

Soient a et b deux réels,

Si $f(x) = \exp(ax + b)$ alors $f'(x) = a\exp(ax + b)$.

Exemple :

Soit f une fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \exp(-x + 2)$.

On applique la propriété précédente avec $a = -1$ et $b = 2$.

Ainsi, $f'(x) = -1\exp(-x + 2) = -\exp(-x + 2)$