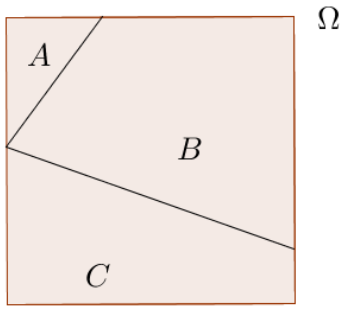
Dénombrement : principe additif et multiplicatif

En mathématique, dénombrer c'est compter le nombre d'objets d'un ensemble.

- Le principe additif

Lorsque l'on doit dénombrer un ensemble, on va procéder à une classification sur les objets de l'ensemble, et pour connaitre le nombre total d'objets, nous allons compter le nombre d'objets par classe de la classification.



Si on a une ensemble Ω, on cherche à dénombrer le nombre d'éléments de Ω. On établit ainsi une classification. Ici il y a 3 classes : A, B, et C. Dans A il y a 4 éléments, dans B il y a 3 éléments et dans C il y en a 5. On note le nombre d'éléments de Ω (le cardinal de Ω) de cette manière : $|\Omega|$

$$|\Omega| = |A| + |B| + |C|$$

Cette propriété est vraie à certaines conditions :

Il faut que tous les éléments soient comptés au moins une fois :

$$A \cup B \cup C = \Omega$$

On n'oublie aucun élément de Ω

Il ne faut pas compter plusieurs fois le même élément :

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$$

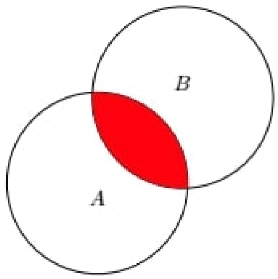
La classification doit être non redondante : chaque élément doit être compté au plus une fois., ce qui signifie qu'il n'y a pas d'élément qui soit présent dans deux classes différentes.

Prenons un exemple de classification :

Dans une classe il y a 14 filles et 20 garçons. Donc au total 20+14=34 élèves.

Prenons maintenant un exemple ou il faut faire attention :

Dans un classe de 34 élèves, tous étudient au moins une LV anglais ou allemand : 23 étudient l'anglais, 20 étudient l'allemand. Combien étudient les 2 LV ?



La classe correspond à Ω. Les élèves qui étudient l'allemand correspondent à l'ensemble A et ceux qui étudient l'anglais correspondent à l'ensemble B.

Il y a des élèves qui étudient les deux langues.

Ainsi, si on dit que $|\Omega| = |A| + |B|$, on compte deux fois les élèves qui étudient les deux langues : on les compte en tant que germanistes et en tant qu'anglicistes. S'ils sont comptés deux fois, il faut enlever une fois les éléments qui se situent à l'intersection de A et B.

On obtient donc la formule suivante (très similaire à celle des probabilités) :

$|\Omega| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Donc $|A \cap B| = |A| + |B| - |\Omega| = 43 - 34 = 9$

Il y a donc 9 élèves qui étudient les deux langues.

Dans cette exemple, la condition d'unicité donnée plus haut n'est pas vérifiée car certains éléments sont dans les deux classes à la fois. On ne peut donc pas dire $|\Omega| = |A| + |B|$

- Le principe multiplicatif

Prenons un exemple :

Un restaurant propose à sa carte 2 entrées, 4 plats principaux (PP) et 3 desserts. On constitue un menu avec une entrée, un PP et un dessert. Le but est de dénombrer le nombre de menus possibles.

Lors du premier choix on a deux branches car 2 entrées possibles, lors du deuxième on a 4 branches pour chaque premier choix (car 4 plats principaux possibles). Et enfin, pour chaque extrémité il y a 3 choix possibles pour les 3 desserts au choix.

Chaque branche correspond à un menu différent, il suffit maintenant de compter le nombre de branches, c'est-à-dire le nombre d'extrémités sur la dernière colonne.

On a donc $2 \times 4 \times 3 = 24$ menus possible avec 2 qui correspond au nombre de choix d'entrée, 4 au nombre de choix de PP et 3 au nombre de choix de dessert.

Écrivons le de manière plus théorique :

On considère les 3 ensembles suivants :

- E : L'ensemble des entrées
- P : L'ensemble des PP
- D : l'ensemble des desserts

Un menu correspond donc à un triplet $(e, p, d) \in E \times P \times D$, avec e dans E, p dans P et d dans D.

$E \times P \times D$ correspond au produit cartésien des ensembles.

On a donc : $E \times P \times D = |E| \times |P| \times |D|$

Une autre façon de voir la chose: le syndrome de l'autoroute

Lorsque sur l'autoroute il y a 3 sorties principales et sur chaque sortie principale il y a 2 sortie secondaire, il n'y a pas 3+2 sorties totales mais 3x2 sorties totales.

- Ensemble de k-uplets dans une ensemble E à n éléments

Prenons maintenant un cas particulier :

On prend tous les éléments du triplet dans le même ensemble. On cherche l'ensemble de

k-uplets dans une ensemble E à n éléments : [|1,n|]=E

On doit donc déterminer un k-uplet : (x,x,…,x,x)

Pour chaque x, il y a n choix possibles. D'après le principe multiplicatif, il y a n^k

Donc dans un produit cartésien, lorsque les ensembles sont répétés ($E \times E \times ... \times E$) on peut écrire :

$|E^k| = |E|^k$

On est dans un modèle de tirage avec ordre (l'ordre importe) et avec répétition (on peut avoir plusieurs fois le même élément dans le k-uplet)

Prenons un exemple :

Un sac contient 8 jetons numérotés de 1 à 8.

On tire successivement (donc l'ordre compte) et avec remise (il peut donc y avoir des répétitions) 3 jetons.

Le but est de déterminer le nombre de résultats possibles : le nombre de triplet de la forme (J_1, J_2, J_3) avec J_1 le numéro du premier jeton tiré, J_2 le numéro du deuxième jeton tiré, J_3 le numéro du troisième jeton tiré.

Comme il y a un ordre et répétition, il y a 8 choix pour le premier, 8 pour le deuxième et 8 pour le troisième : il y a $8^3 = 512$ choix possibles.

Il est donc nécessaire de se poser la question de l'ordre et de la répétition dans ce type d'exercice.